10/12/15

Υπενθύμιση: Είδαμε ότι αν $V=F^3$ και $v_1=(\alpha,b,c)$, $v_2=(d,e,f)$, $v_3=(g,h,i)$. Τότε:

α) v_1, v_2 γραμμ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν βαθμίδα $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}=2$

β) v_1, v_2, v_3 βάση του V αν και μόνο αν

$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \neq 0_F \iff$ βαθμίδα $\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$

Παράδειγμα:

α) $V=\mathbb{R}^3$, $v_1=(1,5,10)$, $v_2=(0,3,6)$, $v_3=(0,0,2015)$

Έχουμε

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2015 \end{bmatrix} = 3\cdot 2015 \neq 0$$

πίνακας άνω τριγωνικός. Άρα v_1, v_2, v_3 βάση του $\mathbb{R}^3$.

β) Υποθέτουμε ότι $v_1=(1,5,10)$, $v_2=(0,3,6)$, $v_3=(1,8,16)$.

Μετά τις πράξεις

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 16 \end{bmatrix} = 0$$

Συμπεράσματα: α) v_1, v_2, v_3 όχι βάση του $\mathbb{R}^3$

b) v_1, v_2, v_3 γραμμ. ανεξάρτητα

c) $\mathbb{R}^3 \neq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

Εδώ χρησιμοποιούμε την πρόταση $\dim V = \mu$ και $w_1, w_2 \ldots w_\mu \in V$ τότε $w_1, w_2 \ldots w_\mu$ βάση του V αν και μόνο αν w_1, w_2, w_μ γραμμ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν τα $w_1 \ldots w_\mu$ παράγουν το V, δηλαδή $V = \langle w_1 \ldots w_\mu \rangle$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $w_1 = (1,2,3)$, $w_2 = (2,4,6)$. Είναι τα w_1, w_2 γραμμικώς ανεξάρτητα;

α' τρόπος: Έχουμε $2 \cdot w_1 + (-1) \cdot w_2 = 0_V = (0,0,0) \Rightarrow$ w_1, w_2 γραμμ. εξαρτημένα.

β' τρόπος: Υπολογίζουμε βαθμίδα $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Πιο γενικά αν $V = F^n$ και έχουμε n-διανύσματα $w_1, w_2, \ldots w_n$ σχηματίζουμε τον πίνακα A με γραμμές τα w_i. Τότε $A \in F^{n \times n}$ και τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
α) $w_1 \ldots w_n$ βάση του V
β) $w_1 \ldots w_n$ γραμμ. ανεξάρτητα
γ) $V = \langle w_1 \ldots w_n \rangle$
d) $\det A \neq 0_F$
e) βαθμίδα$(A) = n$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε $F = \mathbb{R}$. Τότε το σύνολο $\mathbb{C}$ με πράξεις:

- $+$ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ πρόσθεση μιγαδικών δηλαδή $(\alpha + bi) + (\alpha' + b'i) = (\alpha + \alpha') + (b + b')i$ με $\alpha, \alpha', b, b' \in \mathbb{R}$
- $\cdot$ $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\lambda(\alpha + bi) = (\lambda\alpha) + (\lambda b i)$ για $\lambda, \alpha, b \in \mathbb{R}$

Είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$.

Χαρακτηρισμός: Το σύνολο $\{1, i\}$ είναι $\mathbb{R}$-βάση του $\mathbb{C}$.
Άρα $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Απόδειξη

α) Τα $1, i$ γραμμ. ανεξ. Πράγματι έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 1 + \lambda_2 i = 0 = 0 + 0i$

Άρα $\lambda_1 + \lambda_2 i = 0 + 0i \xrightarrow[\mathbb{C}]{\text{ορισμός}} \lambda_1 = 0_{\mathbb{R}}, \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}$. Συνεπώς $1, i$ είναι γραμμ. ανεξ.

b) Τα $1, i$ παράγουν τον $\mathbb{C}$ ως $\mathbb{R}$ δ.χ. Πράγματι έστω $\alpha + bi \in \mathbb{C}$ με $\alpha, b \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\alpha + bi = \alpha \cdot 1 + bi$.

Συνεπώς $\langle 1, i \rangle = \mathbb{C}$.

Πρόταση: Έστω V ~~$V \neq \{0\}$~~ διαν. χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος F και W υπόχωρος του V.

Τότε α) $\dim_F W \leq \dim_F V$

b) $\dim_F W = \dim_F V \Leftrightarrow W = V$

Ορισμός (προηγείται της από των παραπάνω πρόταση)

Αν $V = \{0_V\}$ λέγεται ότι $\dim_F V = 0$

Παράδειγμα στο $\mathbb{R}^2$

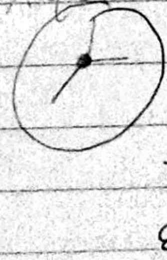
α) $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ με διάσταση 0.

b) Ευθείες που περνούν από το $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$. Κάθε μία έχει διάσταση 1

c) $\mathbb{R}^2$ με διάσταση 2 (γιατί $e_1 = (1,0)$, $e_2 (0,1)$ βάση)

Υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$

Υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$



α) $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ διάσταση μηδέν

b) Ευθείες που περνούν από το $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$. Κάθε τέτοια ευθεία έχει διάσταση 1 και βάση σχηματίζεται με μη μηδενικό στοιχείο της.

(συνεχεια υποχώροι $\mathbb{R}^3$)

c) Επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$ που περνούν από την αρχή των αξόνων. Κάθε τέτοιο επίπεδο έχει διάσταση 2 και βάση οποιοδήποτε ζεύγος $\{v_1, v_2\}$ σημείων του με την ιδιότητα τα $0_{\mathbb{R}^3}, v_1, v_2$ όχι συνευθειακά

d) $\mathbb{R}^3$ με $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ γιατί $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$ βάση

Πρόταση: Έστω V πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος επί του σώματος F και U, W δύο υπόχωροι του V. (Έχουμε δει ότι $U+W, U\cap W$ υπόχωροι του V.) Ισχύει

$\dim_F (U+W) = \dim_F U + \dim_F W - \dim_F (U\cap W)$

Απόδειξη (Βασική Ιδέα)

Έστω B_0 βάση του $U\cap W$. Από προηγούμενες προτάσεις υπάρχει βάση B_U του U με $B_0 \subseteq B_U$ και βάση B_W του W με $B_0 \subseteq B_W$

Βήμα 1°: Θέτουμε $B_1 = B_0 \cup (B_U \setminus B_0) \cup (B_W \setminus B_0)$

Τότε a) B_1 βάση του $U+W$

b) $|B_1| = \dim_F U + \dim_F W - \dim_F (U\cap W)$

Πρόταση: Έστω $V \neq \{0\}$ πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος επί του F και B βάση του V. Έστω B_1, B_2 μη κενά υποσύνολα του B με $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ και $B = B_1 \cup B_2$

Τότε $V = \langle B_1 \rangle \oplus \langle B_2 \rangle$

Απόδειξη: Άσκηση

Παράδειγμα: $V=\mathbb{R}^3$, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ και $B=\{e_1,e_2,e_3\}$

Διάφοροι τρόποι διαμέρισης του B σε ξένα μη κενά υποσύνολα.

Περίπτωση 1: $B_1=\{e_1,e_2\}$, $B_2=\{e_3\}$. Ποιο είναι το $\langle B_1\rangle$

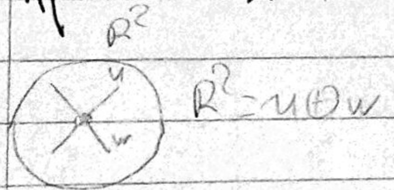
$\langle B_1\rangle=\{\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2 : \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}=\{\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0):\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}=$

$=\{(\lambda_1,\lambda_2,0):\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}\leftarrow$ xy επίπεδο

$\langle B_2\rangle=\{\lambda_3 e_3 \mid \lambda_3\in\mathbb{R}\}=\{(0,0,\lambda_3):\lambda_3\in\mathbb{R}\}\leftarrow$ άξονας των z

Έχουμε από πρόταση $\mathbb{R}^3=\langle e_1,e_2\rangle\oplus\langle e_3\rangle$

Παράδειγμα 2: Αν $e_1,e_2,\dots,e_5$ βάση του V, τότε η πρόταση λέει $V=\langle e_2\rangle\oplus\langle e_1,e_3,e_4,e_5\rangle=\langle e_3,e_5\rangle\oplus\langle e_1,e_2,e_4\rangle$
$=\langle e_2,e_4\rangle\oplus\langle e_1,e_3,e_5\rangle$ και πολλοί άλλοι τρόποι.



Αλγόριθμος (εύρεσης βάσης)

Έστω $e_1\dots e_m$ βάση του V και $W=\langle v_1\dots v_n\rangle$ υπόχωρος του V. Ο Αλγόριθμος επιστρέφει βάση του W.

Βήμα 1ο: Γράφουμε $v_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}e_j$ για $i=1,2\dots n$
(Υπάρχει μοναδική γραφή αφού $e_1\dots e_m$ βάση του V.

Βήμα 2ο: Θέτουμε $A=[a_{ij}]\in F^{n\times m}$
Με γραμμοπράξεις (αλγόριθμο απαλοιφής Gauss) βρίσκουμε κλιμακωτό $C=[c_{ij}]\in F^{n\times m}$ γραμμοϊσοδύναμο με τον A.

Βήμα 3ο: Έστω ότι οι μη μηδενικές γραμμές του C είναι οι $1,2,3\dots q$. Θέτουμε για $i=1,2\dots q$,
$w_i=\sum_{j=1}^{m}c_{ij}e_j$. Τότε $\dim W=q$ και $w_1\dots w_q$ βάση του W

Παράδειγμα: Έστω $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = (1,-3,2)$, $v_2 = (1,2,-3)$, $v_3 = (5,2,-2)$ $v_4 = (1,0,-1)$ και $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Βρείτε μια βάση και την διάσταση του W.

Λύση

Θέτουμε $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

Έχουμε
$$v_1 = 1\cdot e_1 - 3e_2 + 2e_3$$
$$v_2 = e_1 + 2e_2 - 3e_3$$
$$v_3 = 5e_1 + 2e_2 - 7e_3$$
$$v_4 = e_1 + 0e_2 - e_3$$

Θέτουμε $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Με γραμμοπράξεις...

$$\xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - r_1} \cdots \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 5r_1} \cdots \xrightarrow{r_4 \mapsto r_4 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 17 & -17 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \mapsto \frac{1}{5} r_2} \cdots \xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 17r_2} \cdots \xrightarrow{r_4 \mapsto r_4 - 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $r = 2$. Θέτουμε $w_1 = e_1 - 3e_2 + 2e_3$, $w_2 = e_2 - e_3$ και έχουμε $w_1 = (1,-3,2)$ και $w_2 = (0,1,-1)$ και άρα $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$